Первый Всероссійскій Съѣздъ Преподавателей Физики, Химіи и Космографіи.

С.-Петербургъ 27 Дек. 1913—6 Янв. 1914 г.

Вліяніе погрѣшностей измѣреній на результатъ работы.

Докладъ **А. С. Вольфенсона**.

Работы измѣрительнаго характера обыкновенно заканчиваются вычисленіемъ результата, такъ какъ искомая физическая величина въ большинствѣ случаевъ не измѣряется непосредственно, а находится въ опредѣленной математической зависимости отъ другихъ физическихъ величинъ. Умѣнье вычислять вліяніе погрѣшностей въ измѣреніяхъ на погрѣшность результата даетъ указанія: 1) на условія, въ которыхъ измѣряемая величина можетъ быть опредѣлена съ наибольшею точностью; 2) на точность вычисленій, отвѣчающую точности измѣреній. Въ „Физич. Обозр.“ 1910 г. № 3 и 1911 г. № 5 помѣщена статья В. К. Роше, содержащая обстоятельное элементарное изслѣдованіе вопроса. Статья предназначена главнымъ образомъ для преподавателей и соотвѣтственнымъ образомъ изложена. Въ послѣдующемъ изложеніи, имѣющемъ въ виду главнымъ образомъ учениковъ, обобщеніямъ предшествуетъ рѣшеніе конкретныхъ задачъ и разборъ частныхъ случаевъ.

Нѣтъ нужды основывать на какихъ-либо теоретическихъ соображеніяхъ тѣ вычисленія, что сопровождаютъ простѣйшія классныя измѣренія на первыхъ урокахъ физики: для рѣшенія представляющихся вопросовъ достаточно принять за руководящее начало не требующее доказательства положеніе: „точность вычисленій должна соотвѣтствовать точности измѣреній“.

Подтвердимъ сказанное примѣрами.

1-я задача. Искомая величина опредѣляется на основаніи одного лишь измѣренія *).

На вѣсахъ Роберваля взвѣшено нѣкоторое количество ртути съ точностью около $^1/_{10}$ фунта. Вѣсъ оказался *равнымъ 11,5 фунта. Вычислить объемъ ртути въ литрахъ. Повѣрить* рѣшеніе непосредственнымъ измѣреніемъ объема мензуркою, раздѣленною на кубическіе сантиметры.

При рѣшеніи задачи представляется рядъ вопросовъ:

1) Сколько слѣдуетъ сохранить десятичныхъ знаковъ въ переводномъ множителѣ?

$$\begin{array}{r|l} 1150 & 244 \\ \underline{976} & 4{,}71 \\ 1740 & \\ \underline{1708} & \\ 320 & \end{array}$$ килогр. съ погрѣшностью ($\pm 0{,}04$)

Отбрасывая 0,04 фунта на одинъ килограммъ, при трехъ килограммахъ допускаемъ ошибку 0,12 ф., большую ошибки въ измѣреніи: — 0,1 фунта. Поэтому въ данномъ случаѣ слѣдуетъ, отбросивъ третій, сохранить второй десятичный знакъ въ переводномъ множителѣ. Вообще же число сохраняемыхъ десятичныхъ знаковъ слѣдуетъ сообразовать съ числомъ килограммовъ въ частномъ. Объясненіе: при неизмѣнной абсолютной ошибкѣ во взвѣшиваніи точность измѣренія увеличивается вмѣстѣ съ количествомъ взвѣшиваемаго вещества.

2) Сколько десятичныхъ знаковъ слѣдуетъ вычислить въ частномъ?

0,1 фунта = 0,04 кило (приблизительно).

3) Слѣдуетъ-ли принять плотность ртути равной 13,59 или 13,6.

*) Отношеніе килограмма къ фунту и плотность ртути беремъ изъ таблицъ физическихъ постоянныхъ.

Принимая за плотность ртути 13,6, допускаемъ на одномъ литрѣ ртути ошибку въ 0,01 килогр., меньшую 0,1 фунта; въ данномъ случаѣ ошибка еще незначительнѣе.

$$\begin{array}{r|l} 47{,}1 & 136 \\ \underline{408} & 0{,}346 \\ 630 & \\ \underline{544} & \\ 860 & \end{array}$$ съ погрѣшностью ($\pm$ 0,003).

4) Сколько слѣдуетъ вычислить десятичныхъ знаковъ въ окончательномъ результатѣ?

Ошибка въ 0,1 фунта во взвѣшиваніи, т. е. приблизительно въ 40 граммовъ, даетъ ошибку въ объемѣ ртути около 3 кубическихъ сантиметровъ. Въ окончательномъ результатѣ вычислимъ три десятичныхъ знака и получимъ искомый объемъ равнымъ 346 куб. сантм. съ погрѣшностью ($\pm$3 куб. сант.). Слѣдуетъ повѣрка.

II-я задача. Искомая величина опредѣляется изъ 2-хъ измѣреній.

Опредѣлить плотность даннаго куска мѣди по вѣсу его и по объему.

Объемъ (19 куб. сантм.) можетъ быть измѣренъ съ помощью демонстраціоннаго объемомѣра съ точностью до 0,1 куб. сантм.; для того чтобы ошибки измѣренія были приблизительно одного порядка, достаточно произвести взвѣшиваніе на демонстраціонныхъ вѣсахъ съ наглядными разновѣсками съ точностью до 1 грамма. (Вѣсъ = 170 гр.). Приведенный выше принципъ не даетъ возможности непосредственно опредѣлить наибольшую погрѣшность результата, складывающуюся въ данномъ случаѣ изъ погрѣшностей въ двухъ измѣреніяхъ. При производствѣ вычисленій будемъ предполагать, что найденное измѣреніемъ приблизительное значеніе одной изъ величинъ объема представляетъ точное его значеніе.

Въ такомъ случаѣ ошибка въ результатѣ, происходящая отъ неточности во взвѣшиваніи, достигаетъ на каждый куб. снтм. $\frac{1}{19}$ грамма, т. е. приблизительно 0,05 грамма и результатъ представляется въ видѣ d=8,94 съ погрѣшностью (±0,05). Чтобы получить точное значеніе погрѣшности результата, примемъ во вниманіе ошибку въ измѣреніи

170 гр. | 19
152 | 8,94 гр.
180
171
90

(± 0,05)
(± 0,04)
(± 0,09)

объема, равную $\frac{1}{190}$ куб. снтмтр. на каждый куб. снтм.; въ свою очередь и эта ошибка даетъ ошибку въ вѣсѣ каждаго куб. снтм. мѣди въ $\frac{894}{19000}$ грамма = (приблиз.) 0,04 гр. Итого полная ошибка въ вычисленіи вѣса 1 куб. снтм. мѣди складывается изъ двухъ ошибокъ въ (± 0,05) и (± 0,04) и въ наиболѣе неблагопріятномъ случаѣ погрѣшность результата достигаетъ значенія (± 0,09). Искомое значеніе плотности равно d = 8,94 съ наибольшею погрѣшностью въ (± 0,09).

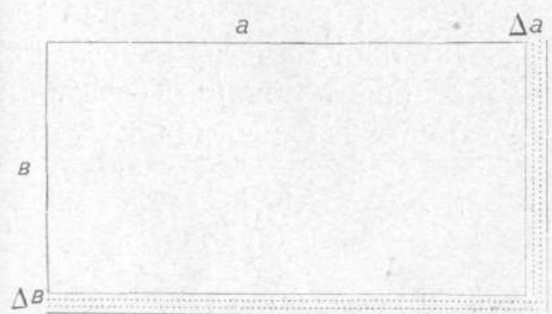
Та же задача съ измѣненными данными, а именно при допущеніи, что какъ вѣсъ, такъ и объемъ куска мѣди увеличены въ 10 разъ, при неизмѣнныхъ абсолютныхъ ошибкахъ измѣреній, можетъ служить примѣромъ, хорошо выясняющимъ значеніе относительной точности измѣреній.

1700 гр. | 190
1520 | 8,947 гр. (± 0,009)
1800
1710
900
760
1400
1330

Такимъ образомъ, какъ намъ кажется, при рѣшеніи задачъ, подобныхъ приведеннымъ, общія соображенія могутъ быть замѣнены частными пріемами, и съ пользой для дѣла. Но уже въ первыхъ ученическихъ работахъ мы встрѣчаемъ такого рода зависимости между искомою и измѣряе-

мыми физическими величинами, гдѣ безъ общихъ соображеній представляется затруднительнымъ судить о степени точности результата. Такова, напримѣръ, задача объ опредѣленіи объема мѣднаго параллелопипеда путемъ измѣренія его реберъ штангенъ-циркулемъ, составляющая часть одной изъ задачъ объ опредѣленіи плотности мѣди. Эта задача кажется намъ особо благопріятной для перехода отъ частныхъ пріемовъ къ общимъ соображеніямъ, такъ какъ представленіе объ ошибкѣ въ объемѣ является вполнѣ конкретнымъ и ошибка эта вычисляется изъ ошибокъ въ ребрахъ параллелопипеда путемъ геометрическихъ, т. е. простѣйшихъ соображеній.

Въ дальнѣйшемъ предполагаемъ, что намъ извѣстны наибольшія погрѣшности въ измѣряемыхъ величинахъ и будемъ отыскивать наибольшую же погрѣшность въ результатѣ. Подъ символомъ Δa будемъ подразумѣвать наибольшее абсолютное значеніе ошибки въ измѣряемой величинѣ a; + передъ Δa обозначаетъ ошибку въ сторону увеличенія, знакъ — въ сторону уменьшенія значеній измѣряемой величины. Двойной знакъ передъ погрѣшностью результата обозначаетъ, что, перемѣнивъ знаки ошибокъ измѣряемыхъ величинъ, мы получили бы для наибольшей ошибки результата то же значеніе по числовой величинѣ, но съ противоположнымъ знакомъ.



Обозначимъ истинное значеніе реберъ параллелопипеда черезъ a, b, c, истинное значеніе объема $x = abc$; ошибка въ площади основанія параллелопипеда равна суммѣ площадей заштрихованныхъ прямоугольниковъ $\Delta y = b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b$. Ошибка въ объемѣ равнялась бы, если бы высота была измѣрена точно, объему $(b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b)c$, но ошибка Δc въ измѣреніи и высоты прибавляетъ къ ошибкѣ въ объемѣ объемъ слоя $(a+\Delta a)(b+\Delta b)\Delta c$; итого полная ошибка $\Delta x=(a\,\Delta b+b.\Delta a+\Delta a.\Delta b)\,c+(a+\Delta a)(b+\Delta b)\,\Delta c$ или $\Delta x=ac.\Delta b+bc.\Delta a+c.\,\Delta a.\,\Delta b+ab\Delta c+b\Delta a.\Delta c+a.\Delta b\Delta c+a\Delta\,b.\Delta.\,\Delta c$.

Отбрасывая члены, содержащіе произведенія двухъ и трехъ малыхъ дробей, получимъ для абсолютной погрѣшности объема простое выраженіе $\Delta x=ac.\Delta b+bc.\Delta a+ab.\Delta c$ и для относительной ошибки, по раздѣленіи послѣдняго равенства на равенство $x=abc$, выраженіе $\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta}{c}$.

Числовой примѣръ: $a=23{,}3$ мм., $b=15{,}6$ мм., $c=30{,}1$ мм. $\Delta a=\Delta b=\Delta c=0{,}1$ мм. $x=abc=11010$ кб. мм.

$$\frac{\Delta a}{a}=\frac{1}{233}=0{,}004$$
$$\frac{\Delta b}{b}=\frac{1}{156}=0{,}006$$
$$\frac{\Delta c}{c}=\frac{1}{301}=0{,}003$$
$$\frac{\Delta x}{x}=0{,}013$$

$\frac{\Delta x}{x}=0{,}013$ или $1{,}3\%$ измѣряемой величены, что составляетъ приблизительно 143 куб. мм.

Итого, искомый объемъ $V=11010$ куб. мм. ($\pm$ 143 к. м.).

Далѣе слѣдуютъ элементарные выводы наибольшихъ погрѣшностей результатовъ для величинъ, связанныхъ простѣйшими математическими зависимостями.

I. $x=ab$ (1) $\qquad x+\Delta x=(a+\Delta a)(b+\Delta b)$
$x+\Delta x=ab+b\Delta a+a\Delta a+\Delta a\Delta q$ (2)

Вычитая изъ равенства (2) равенство (1) и отбрасывая членъ $\Delta a\Delta b$, какъ весьма малый, получимъ для абсолютной ошибки результата $x\Delta$ значеніе $\Delta x=b\Delta a+a\Delta b$ и для относительной ошибки $\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$.

II. $x=abc$

Выведенная въ I формула легко обобщается для случая 3-хъ и болѣе множителей подстановкой $k=ab$, откуда $x=kc$, но мы предпочитаемъ непосредственный выводъ, какъ повѣрочный для рѣшенія задачи о погрѣшности въ объемѣ прямоугольнаго параллелопипеда
$x+\Delta x=(a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c)=(ab+b\Delta a+a\Delta b+a\Delta b+\Delta a\Delta b)(c+\Delta c)$.
$x+\Delta x=abc+bc\Delta a+ac\Delta b+c\Delta a\,\Delta b+ab\Delta c+b\Delta a\Delta c+a\Delta b\Delta c+\Delta a\Delta b\Delta c$; откуда мы имѣемъ

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}.$$

$$\Delta x=bc\Delta a+ac\Delta b+ab\Delta c$$

Тожественные результаты даннаго общаго вывода и вывода погрѣшности въ объемѣ прямоугольнаго параллелопипеда должны укрѣпить учениковъ въ убѣжденіи, что погрѣшность въ числовомъ значеніи результата зависитъ отъ числовыхъ значеній измѣрямыхъ величинъ и погрѣшностей въ ихъ измѣреніи, но совершенно не зависитъ отъ рода физическихъ величинъ, связанныхъ данною математическою зависимостью.

III. $x=\frac{a}{b}$ (1). Мы получимъ наибольшее значеніе дроби $x+\Delta x$ и слѣдовательно наибольшее отступленіе отъ истиннаго ея значенія, если сдѣлаемъ при измѣреніи положительную ошибку въ величинѣ a, входящей въ числителя дроби, и отрицательную ошибку въ величинѣ b, входящей въ ея знаменателя.

$$x+\Delta x=\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}$$

$$\Delta x=\frac{a+a\,\Delta}{b-\Delta b}-\frac{a}{b}$$

$$\Delta x=\frac{ab+b\Delta a-ab+a\Delta b}{\left\{1-\frac{\Delta b}{b}\right\}b^2}$$.Пренебрегая въ выраженіи

$1 - \frac{\Delta b}{b}$ малою дробью $\frac{\Delta b}{b}$, мы допускаемъ весьма малую ошибку въ значенiи ошибки Δx, представляющейся въ видѣ:

$$\Delta x = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Дѣля равенство (2) на равенство (1), получимъ

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2} : \frac{a}{b}$$

и по выполненiи дѣйствiя

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

IV.

$$x = a + b$$
$$x + \Delta x = a + \Delta a + b + \Delta b$$
$$\Delta x = \Delta a + \Delta b$$
$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a+b} + \frac{\Delta b}{a+b}$$

V. $x = a - b$

Мы получимъ наибольшее значенiе разности и слѣдовательно наибольшее отступленiе отъ истиннаго ея значенiя, если при измѣренiи допустимъ положительную ошибку въ величинѣ a, входящей въ уменьшаемое, и отрицательную ошибку въ величинѣ b, входящей въ вычитаемое:

$$x + \Delta x = (a + \Delta a) - (b - \Delta b)$$
$$x + \Delta x = a + \Delta a - b + \Delta b$$
$$\Delta x = \Delta a + \Delta b$$
$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a-b} + \frac{\Delta b}{a-b}$$

VI. $x = a^n$ Выводъ II остается въ силѣ для случая

$a = b = c = d$

$x = a.\ a.\ a \cdot \cdot \cdot \cdot$ (n разъ)

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} + \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ (n разъ)}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = n\frac{\Delta a}{a}$$

Выведенное соотношенiе остается справедливымъ и при дробномъ показателѣ.

VII. $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Возвышая обѣ части равенства въ n—ую степень,

$x^n = a$

и примѣняя (VI)

$n\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a}$, откуда

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}\,\frac{\Delta a}{a}.$$

VIII.

$$x = a^{\frac{m}{n}}$$

Замѣняя данное равенство равенствомъ $x = \left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}^m$ съ помощью подстановки $a^{\frac{1}{n}} = k$, получимъ $x = k^m$ и на основанiи VII

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{1}{n}\,\frac{\Delta a}{a}.$$

Откуда $\frac{\Delta x}{x} = m\frac{\Delta k}{k}$ и послѣ подстановки

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{m}{n}\,\frac{\Delta a}{a}.$$

Изъ доказаннаго въ I и III слѣдуетъ, что переносъ множителя изъ числителя въ знаменатель выраженiя остается безъ влiянiя на наибольшую ошибку результата; обобщая доказанное допущенiемъ $b = c^{к}$, заключаемъ, что вообще знакъ показателя остается безъ влiянiя на наибольшую ошибку результата.

Особаго разсмотрѣнія требуютъ случаи, гдѣ одно изъ значеній измѣряемыхъ величинъ входитъ повторно въ два и болѣе множителя выраженія. Данное значеніе является результатомъ измѣренія, произведеннаго либо съ положительною, либо съ отрицательною ошибкой; между тѣмъ въ зависимости отъ того, входитъ ли это значеніе въ выраженіе слагаемымъ или вычитаемымъ, въ числителя или въ знаменателя, одна и таже ошибка въ измѣряемой величинѣ можетъ то увеличивать, то уменьшать ошибку результата. Заключеніе о наибольшей ошибкѣ результата для подобныхъ выраженій мы сдѣлаемъ изъ разбора частныхъ случаевъ, особенно часто встрѣчающихся при рѣшеніи физическихъ задачъ.

$$\text{IX. } x = \frac{a-b}{c+b} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

Одна и таже, напримѣръ, отрицательная ошибка въ измѣряемомъ значеніи величины b влечетъ за собой увеличеніе числителя и уменьшеніе знаменателя дроби какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ результатъ увеличивается. Наибольшее значеніе результата, принимая во вниманіе ошибки въ измѣреніи a и c, очевидно, равно:

$$x + \Delta x = \frac{(a+\Delta a)-(b-\Delta b)}{(c-\Delta c)+(b-\Delta b)} \quad \ldots \ldots (2).$$

Вычитая почленно изъ равенства (2) равенство (1), получимъ для наибольшей ошибки результата значеніе

$$\Delta x = \frac{a-b+\Delta a+\Delta b}{c+b-\Delta c-\Delta b} - \frac{a-b}{c+b}.$$

Шестнадцать членовъ числителя расположимъ по четыре въ строкѣ:

$$\begin{array}{r} ac - bc + c\Delta a + c\Delta b \\ ab - b^2 + b\Delta a + b\Delta b \\ -ac - ba + a\Delta c + a\Delta b \\ bc + b^2 - b\Delta c - b\Delta b. \end{array}$$

Послѣ упрощенія получимъ для Δx выраженіе:

$$\Delta x = \frac{c(\Delta a+\Delta b)+b(\Delta a+\Delta b)+a(\Delta c+\Delta b)-b(\Delta c+\Delta b)}{\left|1-\frac{\Delta c+\Delta b}{c+b}\right|(c+b)^2}.$$

Пренебрегая въ множителѣ $1-\frac{\Delta c+\Delta b}{c+b}$ малою дробью $\frac{\Delta c+\Delta b}{c+b}$, мы допускаемъ весьма малую ошибку въ значеніи ошибки Δx, представляющейся по упрощеніи въ видѣ:

$$\Delta x = \frac{(\Delta a+\Delta b)(c+b)+(\Delta c+\Delta b)(a-b)}{(c+b)^2} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Дѣля почленно равенство (2) на равенство (1), получимъ для относительной ошибки результата значеніе:

$$\frac{\Delta x}{x} = (\Delta a+\Delta b)(c+b)+(\Delta c+\Delta b)(a-b) : \frac{a-b}{c+b}$$

что по выполненіи дѣйствія даетъ:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{(\Delta a+\Delta b)(b+c)}{(a-b(c+b)} + \frac{(c\Delta+\Delta b)(a-b)}{(c+b)(a-b)}$$

и для относительной ошибки результата окончательное выраженіе

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a-b} + \frac{\Delta b}{a-b} + \frac{\Delta c}{c+b} + \frac{\Delta b}{c+b}.$$

Откуда заключаемъ, что если ошибка въ измѣреніи значенія величины, повторно входящей въ выраженіе, измѣняетъ результатъ постоянно въ одномъ смыслѣ, наибольшая относительная ошибка результата остается равной суммѣ относительныхъ ошибокъ всѣхъ входящихъ въ данное выраженіе величинъ.

Разсмотримъ, наконецъ, зависимости $x=\frac{a}{a+b}$ (X) и $x=\frac{a}{a-b}$ (XI).

Въ оба выраженія величина а входитъ одинаковымъ образомъ и одна и та-же ошибка въ величинѣ а въ числителѣ и въ знаменателѣ дроби влечетъ за собою измѣненіе результата въ противоположныхъ направленіяхъ; но наибольшее въ данныхъ условіяхъ измѣненіе результата влечетъ за собой наибольшая, соотвѣтственнаго направленія, ошибка въ томъ изъ членовъ дроби, абсолютная величина котораго меньше. Такимъ образомъ для перваго выраженія наибольшимъ значеніемъ результата будетъ

$$\Delta+\Delta x=\frac{a+\Delta a \; ^{*)}}{a+b+\Delta a-\Delta b}$$

и для второго

$$x+\Delta x=\frac{a-\Delta a}{a-b-\Delta a-\Delta b}.$$

Найдемъ, относительную ошибку результата для каждаго выраженія.

X) $x=\frac{a}{a+b}\,;\; x+\Delta x=\frac{a+\Delta a}{a+\Delta a+b-\Delta b}$

$$\Delta x=\frac{a+\Delta a}{a+\Delta a+b-\Delta b}-\frac{a}{a+b}$$

*) Впрочемъ, предположенія о наибольшихъ значеніяхъ результата могутъ быть непосредственно повѣрены. Напримѣръ, для наибольшаго значенія выраженія $x=\frac{a}{a+b}$ возможны два допущенія: $x+\Delta x=\frac{a+\Delta a}{a+b+\Delta a-\Delta b}$ и $x+\Delta x=\frac{a-\Delta a}{a+b-\Delta a-\Delta b}$.

Докажемъ, что $\frac{a+\Delta a}{a+\Delta a+b+\Delta b}>\frac{a+\Delta a}{a-\Delta a+b-\Delta b}$ или $(a+\Delta a)(a-\Delta a)+(a+\Delta a)(b-\Delta b)>(a+\Delta a)(a-\Delta a)+(a-\Delta a)(b-\Delta b)$, откуда послѣ упрощеній вытекаетъ очевидное неравенство $a+\Delta a>a-\Delta a$.

$$\Delta x=\frac{a^2+a\Delta a+ab+b\Delta a-a^2-a\Delta a-ab+a\Delta b}{\left\{1+\frac{\Delta a-\Delta b}{a+b}\right\}(a+b)^2}$$

$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a(a+b)+a(\Delta b-\Delta a)}{(a+b)^2}:\frac{a}{a+b}$ и по упрощеніи

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{a+b}-\frac{\Delta a}{a+b} \quad (A)$$

и XI) $x=\frac{a}{a-b}\,;\; x+\Delta=x\frac{a-\Delta a}{a-\Delta a-(b+\Delta b)}$

$$\Delta x=\frac{a-\Delta a}{a-b-\Delta a-\Delta b}-\frac{a}{a-b}$$

$$\Delta x=\frac{a^2-a\Delta a-ab+b\Delta a-a^2+ab+a\Delta a+a\Delta b}{\left(1-\frac{\Delta a+\Delta b}{a-b}\right)(a-b)^2}$$

$\frac{\Delta x}{x}=\frac{a(\Delta a+\Delta b)-\Delta a(a-b)}{(a-b)^2}:\frac{a}{a-b}$ и по упрощеніи

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta a}{a-b}+\frac{\Delta b}{a-b}-\frac{\Delta a}{a} \quad (B)$$

Сопоставляя выраженія А и В и замѣчая, что

$\frac{\Delta a}{a}>\frac{\Delta a}{a+b}$ и $\frac{\Delta a}{a-b}>\frac{\Delta a}{a}$ заключаемъ, что если

ошибка въ измѣреніи значенія величины, повторно входящей въ данное выраженіе, измѣняетъ результатъ въ противоположныхъ направленіяхъ, для полученія наибольшей относительной ошибки результата слѣдуетъ къ суммѣ прочихъ ошибокъ придать абсолютное значеніе разности относительныхъ ошибокъ повторно входящей величины.

Разборомъ приведенныхъ простѣйшихъ зависимостей можно ограничиться въ элементарномъ курсѣ физики. Выводамъ IX, X и XI можно придать повѣрочный характеръ: къ тѣмъ же результатамъ ученики, достаточно подготовленные, могутъ притти, исходя изъ представленія о „наибольшей“ погрѣшности; далѣе могутъ быть опущены обобщенія VII и VIII. Въ такомъ видѣ „теорія“ ошибокъ оказывается весьма несложною; о цѣнности же теоріи въ приложеніи къ ученическимъ работамъ измѣрительнаго характера можемъ судить по многочисленнымъ примѣрамъ, помѣщеннымъ въ „Физическомъ Обозрѣніи“ за 1911—13 годъ.

Л. Вольфенсонъ.

Типографія Гр. Скачкова съ С-ми. Пѣвческій, 5. Тлф. 38—56.